

# Modèle de la membrane faible associée à une loi Beta: Application à la tomographie par courants de Foucault

Olivier Venard <sup>(1,3)</sup>, Denis Prémel <sup>(1)</sup>, Ali Mohammad-Djafari <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>LESiR - URA CNRS 1375 - ENS cachan 61, Ave du Pdt Wilson - 94235 Cachan

<sup>(2)</sup>LSS - UMR CNRS-Supélec-UPS 014 - ESE - Plateau du Moulon - 91192 Gif sur Yvette

<sup>(3)</sup>LSM - ESIEE - BP 99 - 93162 Noisy le Grand

## RÉSUMÉ

Le travail présenté concerne la mise en œuvre d'un procédé d'imagerie par courants de Foucault. Pour la résolution de ce problème inverse, nous utilisons une approche bayésienne de la régularisation. Nous introduisons deux informations *a priori* : une contrainte sur le domaine d'appartenance de la solution et une prise en compte de la corrélation locale entre pixels. La combinaison de ces deux informations *a priori* permet d'améliorer les résultats de reconstruction, quant à la précision de la forme et à la résolution de la taille des objets à reconstruire dans le cadre de notre application.

## ABSTRACT

This work deals with Eddy currents imaging system. The solution of the associated inverse problem is regularized in a Bayesian estimation framework. The proposed approach combines the following *a priori* informations : the function to be reconstructed had to be piecewise continuous and must belong to a certain domain. This compound *a priori* knowledge allows to enhance reconstruction result regarding to the shape precision and the size resolution of the objects to be reconstructed in this kind of application.

## 1 Introduction

Parmi les techniques de contrôle-non-destructif (CND), la tomographie par courant de Foucault des milieux conducteurs est une technique visant à reconstruire la cartographie des variations de conductivité relative  $f_d$ , du matériau exploré à partir des variations d'une quantité physique observée, la composante normale  $H_n$  du champ magnétique à la surface. Une difficulté du problème inverse vient de la non linéarité de la relation qui lie la fonction objet à reconstruire avec les données observées. La solution du problème direct s'exprime sous la forme de deux équations intégrales couplées. L'une d'elles consiste à calculer le champ diffracté par l'objet et l'autre donne la composante normale du champ rayonné compte-tenu de la distribution du champ diffracté. Pour résoudre ce problème inverse non linéaire, différentes approches ont été proposées, citons notamment : le calcul de la solution par linéarisations successives [5], la reconstruction simultanée de la cartographie du champ interne et de la fonction objet [4].

Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi de conserver les conditions de validité de l'hypothèse de BORN de manière à résoudre le problème inverse linéarisé [9, 12]. La réponse du capteur est reliée à la fonction objet  $f_d$  à reconstruire par un noyau de GREEN  $G_{12}^{me}$  [3], qui modélise la fonction de transfert du dispositif de mesure. Le problème inverse revient à résoudre une équation de FREDHOLM de 1<sup>ère</sup> espèce. Ce problème, souvent mal posé [6, 7], doit être régularisé afin d'obtenir une solution «physiquement» acceptable. L'introduction d'une contrainte de douceur [1, 7] ne permet pas de reconstruire les discontinuités de l'image. Dans notre cas, le milieu examiné peut comporter plusieurs zones homogènes, de

conductivités différentes, séparées par des contours abruptes. La forte corrélation locale entre pixels suggère une modélisation de l'objet par une fonction continue par morceaux («membrane faible») [2].

Lorsque l'objet à reconstruire est principalement binaire, l'information *a priori* introduite par une loi Beta [13] permet de limiter les valeurs admissibles, entre 0 et 1. Cependant cet *a priori* considère tous les pixels indépendants. Certains auteurs ont proposé d'associer le modèle de la «membrane faible» avec une autre fonctionnelle modélisant un champ binaire [11]. Le critère MAP correspondant est alors optimisé à l'aide de l'algorithme GNC [2]. Dans cette communication, nous proposons de combiner le modèle de la membrane faible avec une loi Beta. Ceci permet de ne pas exclure de l'*a priori* des zones d'inclusions de matière plus conductrices que l'air et moins conductrices que le milieu sain qui entoure l'objet.

La communication est organisée de la façon suivante : dans le paragraphe 2, nous rappelons la formulation du problème direct discret dans le cadre de l'hypothèse de BORN. Puis nous formulons le problème inverse dans le paragraphe 3. Le paragraphe suivant aboutit aux choix des fonctionnelles de régularisation selon la nature de l'information *a priori* introduite. Des résultats de simulation montrent ensuite l'intérêt de cette démarche.

## 2 Problème direct

Nous supposons le modèle du dispositif expérimental [9] représenté sur la Figure 1. La solution du problème direct

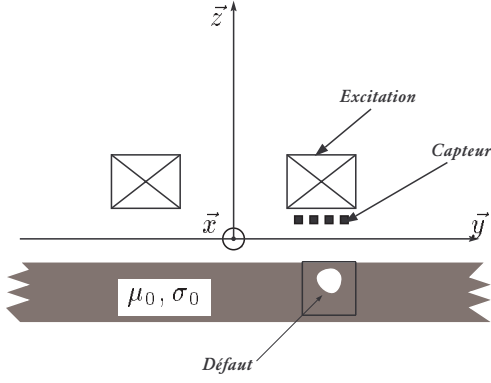


FIG. 1 — Dispositif simulé

linéarisé s'exprime par :

$$H_n(r) = i\omega\mu_0\sigma_0 \int_{\Omega_0} G_{12}^{me}(r, r') f_d(r') E_0(r') dr' \quad (1)$$

où  $G_{12}^{me}(r, r')$  relie une source électrique ponctuelle située en un point  $M'(r')$  du milieu 2 ( $z < 0$ ) à la composante normale du champ magnétique observée en un point  $M(r)$  du milieu 1 ( $z > 0$ ). La fonction objet  $f_d(r') = \frac{\sigma_0 - \sigma_d(r')}{\sigma_0}$  représente les variations de la conductivité normalisée dans le domaine  $D$ . Le vecteur  $E_0$  désigne le champ induit d'excitation en l'absence de défaut,  $\sigma_0$  la conductivité du matériau dans la région saine du domaine  $D$  et  $\sigma_d(r')$  la conductivité dans la région du défaut.

Après discrétisation et suivant la méthode des moments [8] l'équation (1) devient :

$$H_n(x, y, z_0) = j\omega\mu_0\sigma_0\Delta_x\Delta_y \sum_{z'} \sum_{x', y'} G_{12}^{me}(x - x', y - y', z') f(x', y', z') E_0(x', y', z') \quad (2)$$

où

$$G_{12}^{me}(x - x', y - y', z') = \int_{\mathbb{R}^2} \text{sinc}\left(u \frac{\Delta_x}{2}\right) \text{sinc}\left(v \frac{\Delta_y}{2}\right) \frac{2}{\gamma} \sinh\left(\gamma \frac{\Delta_z}{2}\right) \frac{i(vx - uy)}{K + \gamma} e^{-Kz + \gamma z'} e^{ju(x-x') + jv(y-y')} dudv \quad (3)$$

avec  $K^2 = u^2 + v^2$ ,  $\gamma^2 = K^2 - k^2$  et  $k^2 = j\mu_0\sigma_0\omega$ . Les variables  $u$  et  $v$  désignent les pulsations spatiales. Le domaine  $D$  entourant le défaut est discrétisé régulièrement en voxels  $\{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\}$ .

### 3 Problème inverse

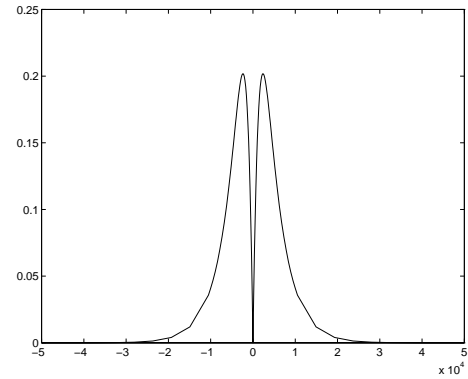
Après discrétisation, le problème revient à résoudre l'équation matricielle :

$$\mathbf{h} = \mathbf{G}_{12}^{me} \cdot \text{diag}(\mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{f} + \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{b}.$$

où  $\mathbf{f}$  est un vecteur prenant les valeurs de la fonction objet sur le domaine  $D$  discrétisé.  $\mathbf{b}$  est un vecteur modélisant le bruit

résultant de la discrétisation et des erreurs de mesures qui est supposé additif. Les éléments de la matrice  $\mathbf{G}_{12}^{me}$ , sont calculés à partir des réponses impulsionnelles  $G_{12}^{me}(0, 0, z')$ .

Une vue en coupe ( $v = 0$ ) du module du spectre de l'opérateur discrétisé  $G_{12}^{me}(u, v)$  est représentée sur la Figure 2. Le comportement passe-bande de cet opérateur met en évidence le caractère mal-posé du problème inverse associé à (1). L'opérateur  $G_{12}^{me}$  lisse les discontinuités de l'objet et supprime l'information concernant les zones continues. Le caractère mal-posé du problème se traduit numériquement par un mauvais conditionnement de l'opérateur  $\mathbf{A}$ . La diminution du pas de discrétisation  $\Delta_x$  ou  $\Delta_y$  dégrade encore le conditionnement du problème. L'approche bayésienne de la régularisation permet

FIG. 2 — Module du spectre de l'opérateur  $G_{12}^{me}$  pour  $v = 0$  (l'axe des abscisses correspond aux pulsations spatiales  $u$ )

de combler le manque d'information par l'introduction d'une connaissance *a priori* sur l'objet sous la forme d'une distribution de probabilité *a priori*, c'est l'objet du paragraphe suivant.

#### 3.1 Choix d'une loi *a priori*

##### 3.1.1 Domaine de définition de la fonction objet

La fonction objet que l'on cherche à reconstruire est une conductivité relative  $f_i = \frac{\sigma_0 - \sigma_i}{\sigma_0}$ , où  $i$  est l'indice du pixel et  $\sigma_i$  la conductivité de la zone associée à ce pixel. Dans le cas d'un défaut caractérisé par une absence de matière ( $\sigma_i = 0$ ), la fonction objet est égale à 1 dans la zone du défaut et à 0 dans la zone homogène ( $\sigma_i = \sigma_0$ ). Elle prendra donc préférentiellement l'une de ces deux valeurs, les autres valeurs appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$  étant moins probables. Son domaine est donc réduit à l'intervalle  $[0, 1]$ . Cette connaissance *a priori* forte peut être traduite par une loi de type Beta.

$$P(f_i) \propto f_i^{-\alpha} (1 - f_i)^{-\beta}, \quad f_i \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \text{ et } \varepsilon, \alpha, \beta > 0$$

En considérant les pixels indépendants, l'énergie associée à cette loi *a priori* devient [12, 13] :

$$U_1(\mathbf{f}) = -\ln P(\mathbf{f}) = \text{cte} + \alpha \sum_i \ln(f_i) + \beta \sum_i \ln(1 - f_i)$$

Un tel choix a cependant un inconvénient. Le critère **MAP** ou l'énergie associée à la loi *a posteriori*.

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|^2 + U_1(\mathbf{f}) \quad (4)$$

n'aura pas de minima pour  $f_i = 0$  ou  $f_i = 1$ . Il faut donc restreindre le domaine de variation de  $f_i$  à l'intervalle  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ . Le résultat de la reconstruction peut devenir plus sensible à la valeur de  $\varepsilon$  qu'au choix de  $\alpha$  et  $\beta$ . Pour y remédier, on peut choisir une loi de même nature, mais bien définie sur  $[0, 1]$  ayant des minima proches de 0 et 1. Il s'agit de

$$-\ln P(\mathbf{f}) = \text{cte} + \sum_i \alpha f_i \ln(\alpha f_i) + \sum_i \beta (1 - f_i) \ln(\beta (1 - f_i))$$

### 3.1.2 Dépendance locale de la fonction objet

L'information *a priori* introduite par la loi Beta néglige les corrélations entre les pixels. Or, la conductivité relative d'un pixel a une forte probabilité de prendre la même valeur que ses voisins hormis aux frontières du défaut. Ceci suggère une modélisation *a priori* de l'objet par une fonction continue par morceaux [2]. L'énergie associée à ce choix de modèle *a priori* est :

$$U_2(\mathbf{f}) = \gamma \sum_i \psi_c(h_{\lambda,\mu}(f_i - f_{i-1})) \quad (5)$$

avec

$$h_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} \lambda^2 t^2 & \text{si } |t| < \frac{\sqrt{\mu}}{\lambda}, \\ \mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonctionnelle  $h_{\lambda,\mu}(\cdot)$  introduit un processus de contour implicite où  $\lambda$  intervient comme un paramètre d'échelle définissant l'ordre de grandeur des surfaces des zones homogènes que l'on cherche à reconstruire, et  $\mu$  détermine en fonction de  $\lambda$  le seuil  $h_0$  de détection d'une discontinuité suivant l'expression  $h_0 = \sqrt{2\mu}/\lambda$ . Le processus de contour rend cette fonctionnelle non convexe. Afin de résoudre le problème d'optimisation, on met en œuvre l'algorithme de Non Convexité Graduelle (**GNC**). Celui-ci introduit la fonctionnelle  $\psi_c(\cdot)$  qui permet, lors de la première étape du **GNC**, de résoudre le problème d'optimisation sur l'enveloppe convexe de  $h_{\lambda,\mu}(\cdot)$ , en choisissant  $c$  suffisamment petit. Lors des étapes suivantes, on relaxe le paramètre  $c$  tel que :

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \psi_c(h_{\lambda,\mu}(\cdot)) = h_{\lambda,\mu}(\cdot)$$

Ce type de régularisation Markovienne ainsi que l'algorithme d'optimisation associé, le **GNC**, sont détaillés dans [2, 10, 11].

### 3.1.3 Critère mixte

Les deux fonctionnelles de régularisation abordées ci-dessus permettent d'introduire dans la recherche de la solution trois types d'informations : la valeur la plus probable que peut prendre séparément chacun des pixels  $U_1(\mathbf{f})$ , l'existence de zones homogènes, et enfin l'existence de discontinuité  $U_2(\mathbf{f})$ . La solution, pour être «physiquement» acceptable, devra donc

satisfaire simultanément ces trois contraintes. Nous proposons donc de définir la solution comme le minimum du critère mixte

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|^2 + U_1(\mathbf{f}) + U_2(\mathbf{f}). \quad (6)$$

qui peut être interprété comme le critère **MAP** ou l'énergie associée à la loi *a posteriori*  $P(\mathbf{f}|\mathbf{h})$ . Ce critère permet donc d'introduire toute l'information physique *a priori* que l'on a sur l'objet à reconstruire.

## 4 Résultats de simulation et Conclusion

Nous allons dans ce paragraphe illustrer les résultats obtenus avec les différents choix de fonctionnelles décrites précédemment. La figure 3-c représente les données obtenues en simulant le problème direct (2) pour un matériau comportant une grappe de trois défauts proches (Figure 3-a). Les données ont été entachées d'un bruit blanc gaussien additif tel que l'on ait un rapport signal sur bruit (RSB) de 20dB. La figure 3-b représente le module de la réponse du noyau  $G_{me}^{12}$  à un pixel de dimension  $(0.1 \times 0.1 \text{ mm})$ , son étalement illustre la fonction de flou introduite par ce noyau.

Le résultat obtenu par les moindres carrés avec critère d'arrêt, (Figure 4-a) est caractérisé par sa douceur et son faible contraste. La régularisation par une loi Beta, (Figure 4-b) permet d'obtenir une image à fort contraste, même si le résultat n'est pas parfait. Le modèle de la membrane faible (Figure 4-c) force, quant à elle, le regroupement de pixels voisins. Dans notre exemple, elle ne permet pas de séparer deux défauts proches. Enfin, la solution proposée dans cet article (Figure 4-d) permet de conserver les détails tout en construisant des zones homogènes et aboutit, dans ce cas, à une reconstruction parfaite.

Ces résultats nous semblent prometteurs et nous envisageons à présent la reconstruction de défauts enfouis et espérons également réduire encore la taille des défauts à reconstruire. Un dispositif expérimental est sur le point de fournir des données réelles afin de valider le procédé d'imagerie par courants de Foucault ainsi construit.

## Références

- [1] M. Bertero, C. De Mol, and E.R. Pike. Linear inverse problems with discrete data : II. stability and regularization. *Inverse Problems*, 4 :573–594, 1988.
- [2] A. Blake and A. Zisserman. *Visual reconstruction*. MIT Press, 1987.
- [3] J.R. Bowler. Eddy currents calculation using half-space green's functions. *J.Appl.Phys.*, 61(3), Février 1987.
- [4] H. Carfantan and A. Mohammad-Djafari. Approche bayésienne et algorithme multirésolution pour un problème inverse non linéaire en tomographie de diffraction. In *GRETSI*, volume 2, pages 849–852, 1995.
- [5] W.C. Chew and Y.M. Wang. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted

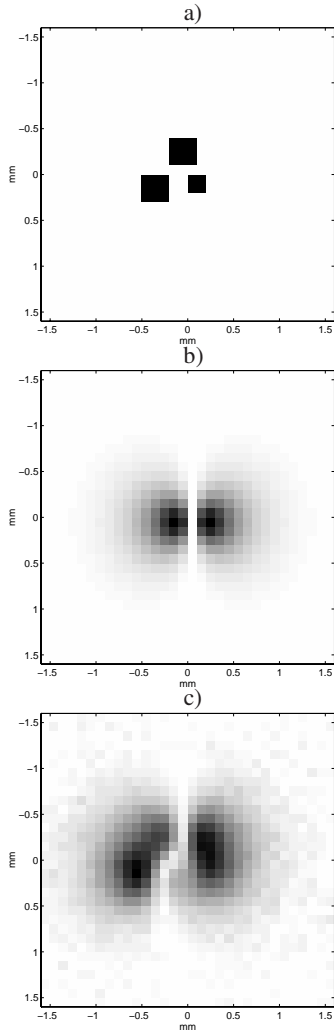


FIG. 3 — a) Image représentant la fonction de défaut ( $\Delta_x = \Delta_y = 0.1\text{mm}$ ) - b) Module du noyau  $G_{12}^{me}$  dans le domaine spatial - c) Module des mesures - RSB =  $20\text{dB}$

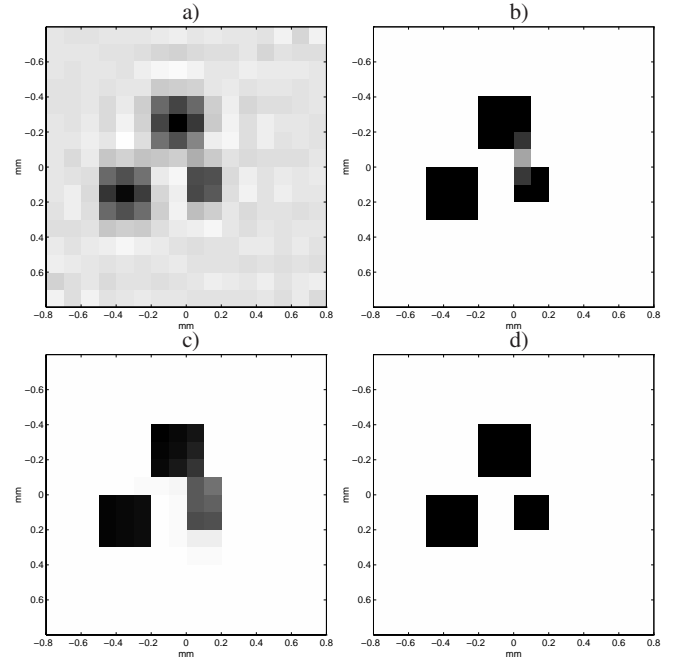


FIG. 4 — a) Moindres carrés avec critère d'arrêt - b) Loi Beta - c) «Membrane faible» - d) Critère mixte

- [12] D. Prémel and A. Mohammad-Djafari. Eddy current tomography in cylindrical geometry. *IEEE Trans. Magn.*, 31(3), 1995.
- [13] D. Prémel, A. Mohammad-Djafari, and B. David. Imagerie des milieux conducteurs par courants de foucault. In *GRETSI*, pages 105–108, 1991.

born iterative method. *IEEE trans. on Med. Imag.*, 9 :pp. 218–225, 1990.

- [6] G. Demoment. Déconvolution des signaux. Technical Report LSS 20/84, LSS - ESE, 1984.
- [7] P.C. Hansen. Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equation of the first kind. *Inverse Problems*, 8 :pp. 849–872, 1992.
- [8] N.C. Haywood. *Eddy current imaging of cracks by inverting field data*. PhD thesis, University of Surrey, Guilford, 1990.
- [9] N. Madaoui, D. Prémel, and D. Placko. Conception et réalisation d'un capteur à courants induits tournants pour la reconstruction tomographique d'image par courant de foucault. In *NUMELEC*, 1997.
- [10] M. Nikolova. *Inversion Markovienne de problèmes linéaires mal posés, application à l'imagerie tomographique*. PhD thesis, Univ. Paris-Sud Orsay, 1995.
- [11] N. Nikolova and A. Mohammad-Djafari. Eddy current tomography using binary markov model. *Signal Processing*, 49(2), 1996.